ZT **Бланк ответа № 17324540**
Заказ № ZTMAIL13214715 22.01.2026 00:03 (МСК)
Состав заказа: Страниц письма 5 Вложений 0 Бланков ответа 1
ФКУ Т УФСИН России по Ульяновской области
Формулы какие-то
От кого: Мифтахов Азат Фанисович, 1993 г.р.
Кому: Анатольевна Елена Горбань

Пишите только с этой стороны и избегайте полей, чтобы информация не потерялась.
Оборотная сторона не отправляется.
Не испорть QR-код!

Будем полагать $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\lambda = \frac{1}{\pi} dx\,dy$ — нормированная мера Лебега на D.

Теорема.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots c_n \in D$. Положим $P(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 - c_k z)$, $C = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} c_k$ и $Q(z) = P(z) - C z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$. Тогда выполнено равенство

$$\int_D \left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|^2 d\lambda = -n \ln(1 - |C|^2) + \int_D \left|\frac{Q'(z)}{Q(z)}\right|^2 d\lambda.$$

Доказательство Теоремы.

При $\alpha, \beta \in D$ нетрудно доказать, что

$$\int_D \frac{\alpha}{1 - \alpha z} \cdot \overline{\frac{\beta}{1 - \beta z}}\, d\lambda = -\ln(1 - \alpha\bar{\beta}), \qquad (1)$$

где функция $\ln w$ — такая ветвь логарифма на круге $\{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < 1\}$, что $\ln 1 = 0$.

Рассмотрим следующую функцию Φ:

$$\Phi(z) = \frac{z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}}{P(z)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \bar{c}_k}{1 - c_k z} \qquad (2)$$

Эта функция обладает тем свойством, что

$$\Phi(D) = D, \quad \Phi(\partial D) = \partial D, \quad \Phi(\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}) = \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}. \qquad (3)$$

Это следует из того, что, скажем, если $|z| < 1$, то каждый член произведения в (2) по модулю меньше единицы, откуда $|\Phi(z)| < 1$. Аналогично, в случаях $|z| = 1$ и $|z| > 1$ выполнено $|\Phi(z)| = 1$ и $|\Phi(z)| < 1$, соответственно.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма.

При $a, b \in D$ выполнено равенство:

$$\int_D \frac{a\,\Phi'(z)}{1 - a\Phi(z)} \cdot \overline{\frac{b\,\Phi'(z)}{1 - b\Phi(z)}}\, d\lambda_z = n \int_D \frac{a}{1 - aw} \cdot \overline{\frac{b}{1 - bw}}\, d\lambda_w.$$